# Задаци и решења

**Клуб младих математичара "Архимедес"- Београд**

***"М И С Л И Ш А"***

Математичко такмичење за ученике СШ
по угледу на
Међународно такмичење "КЕНГУР"

**2008** **2. разред**

## Задаци који се оцењују са 3 бода

**1.** Дванаестина и по неког броја је 10. Који је то број?

(A) 45 (B) 60 (C) 65 (D) 80 (E) 90

*Решење:* (D) 80

$$1\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}x=10\Rightarrow\frac{1}{8}\cdot x=10\Rightarrow x=80$$

**2.** Израз $x^6\cdot x^{-3}$ једнак је:

(A) $x^{18}$ (B) $x^2$ (C) $x^9$ (D) $x^{-18}$ (E) $x^3$

*Решење*: (E) $x^3$ (Основа се препише, а изложиоци саберу.)

**3.** Вредност израза $\sqrt{2^{100}}$ једнака је

(A) 250 (B) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$ (C) $2^{10}$ (D) $2^{50}$ (E) $2^{200}$

*Решење*: (D) $2^{50}$, јер је $\sqrt{2^{100}}=\sqrt{\left(2^{50}\right)^2}=2^{50}$

**4.** За које вредности од $x$ је тачна једнакост $\sqrt{x^2}=|x|$?

(A) Само за $x\geq0$ (B) Само за $x\leq0$ (C) Само за $x=0$
(D) За свако $x\in R$ (E) Ни за једно $x$

**Решење:** (D) За свако $x\in R$

**5.** Збир корена једначине $x^2-2x=0$ је:

(A) −2 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) 4

*Решење:* (D) 2, јер су корени дате једначине $x_1=0$, $x_2=2$.

$$x^2-2x=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=0\vee x-2=0\Rightarrow x=0\vee x=2$$

**6.** Отац је 48 оваца желео да подели својим синовима, али тако да сваки син добије троструко више оваца од броја синова које је отац имао. Колико је синова имао отац?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 12 (E) 16

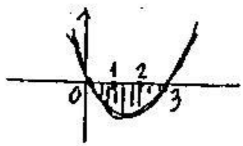
*Решење:* (B) 4

Ако број синова које је отац имао означимо са $x$, где $x \in N$, онда сваки син треба да добије по $3x$ оваца. То значи да треба да буде $x \cdot 3x = 48$ , тј. $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \vee x = -4$, али услове задатка задовољава само $x = 4$.

**7.** Колико има целих бројева који припадају скупу решења неједначине $x^2 < 3x$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) безброј

*Решење:* (C) 2




$x^2 < 3x \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x-3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3,$ а интервалу $(0, 3)$ припадају два цала броја: 1 и 2.

**8.** Колико је $x$ ако је $\log_4 x = 1{,}5$?

(A) 1,5 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

*Решење:* (E) 8 , јер $\log_4 x = 1{,}5 \Leftrightarrow x = 4^{1{,}5} = (2^2)^{1{,}5} = 2^3 = 8$

## <u>Задаци који се оцењују са 4 бода</u>

**9.** Колика је најмања вредност израза $x^2 + 10x + 27$?

(A) −0,5 (B) 0 (C) 2 (D) 7 (E) 27

*Решење:* (C) 2

$y = x^2 + 10x + 27 = x^2 + 10x + 25 + 2 = 2 + (x+5)^2 \geq 2$ ,

па је $\min y = 2$ за $x = -5$.

**10.** Ако је $\alpha$ унутрашњи угао троугла и $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, онда је $\alpha$ једнако:

(A) $150^o$ (B) $120^o$ (C) $60^o$ (D) $30^o$ (E) 30’

*Решење*: (B) $120^o$. Пошто је $\cos\alpha < 0$, то је $\alpha$ тупи угао.

**11.** Ако је $\alpha + \beta = 90^o$ и $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = 3,$ онда је $tg^2\alpha + tg^2\beta$ једнако:

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 7

*Решење:* (Е) 7. Заиста, $tg\alpha + tg\beta = 3 \Rightarrow tg^2\alpha + 2tg\alpha \cdot tg\beta + tg^2\beta = 9 \Rightarrow$ $tg^2\alpha + tg^2\beta + 2 \cdot 1 = 9 \Rightarrow tg^2\alpha + tg^2\beta = 7$

**12.** Колико међу следећим тврђењима има истинитих?

(а) $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ за $x, y \neq 0$ (б) $\log x^y = y \log x$ за $x, y > 0$

(в) $\sqrt{x^2} = -x$ за $x < 0$ (г) $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ за $\forall x \in R$

(д) $2^x = -8$ за $x = -3$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

*Решење*: (D) 3. Истинита тврђења су (б), (в), (г).

Тврђење (а) важи за $x \geq 0$ и $y > 0$.

Тврђење (д) не важи, јер је $2^x > 0$ за свако $x$.

**13.** Колико цифара има запис броја $4^{16} \cdot 5^{25}$ ??

(A) 20 (B) 25 (C) 28 (D) 32 (E) 41

*Решење*: (C) 28

$4^{16} \cdot 5^{25} = (2^2)^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^7 \cdot 2^{25} \cdot 5^{25} = 2^7 (2 \cdot 5)^{25} = 2^7 \cdot 10^{25}$.

Овај број има укупно 28 цифара (128 са 25 нула)

**14.** Странице троугла су 2 cm, 3 cm и 4 cm. Које врсте је тај троугао према угловима?

(A) оштроугли (B) правоугли (C) тупоугли

(D) нема таквог троугла (E) не може се утврдити

*Решење* : (C) тупоугли

*Први начин*. Пошто је $4^2 > 2^2 + 3^2$, тј. не важи Питагорина теорема, троугао није правоугли, већ је тупоугли.

*Други начин*. Обележимо са $\gamma$ највећи угао у троуглу и применимо косинусну теорему: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, тј. у нашем случају:

$$16 = 4 + 9 - 12\cos\gamma \Rightarrow 12\cos\gamma = -3 \Rightarrow \cos\gamma = -\frac{1}{4} < 0,$$

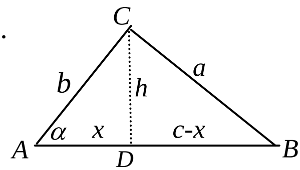
што значи да је угао у II квадранту, дакле, туп.

**15.** Колики је унутрашњи угао $\alpha$ троугла $ABC$, ако међу његовим страницама $a$, $b$, $c$ постоји веза: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$?

(A) $30^{\circ}$ (B) $45^{\circ}$ (C) $60^{\circ}$ (D) $90^{\circ}$ (E) $120^{\circ}$

*Решење:* **:** (C) $60^{\circ}$ Из $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (косинусна теорема) и $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ следи $2\cos\alpha = 1$, тј. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^{o}$.

**Напомена**. Може и без директног позивања на косинусну теорему. У датој релацији заменимо $a^2$ и $b^2$ из $\Delta ADC$ и $\Delta DBC$ по Питагориној теореми. Биће: $h^2 + (c-x)^2 = h^2 + x^2 + c^2 - bc$,




одакле је $2xc = bc \Rightarrow 2x = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{2}$,

што значи да је правоугли $\Delta ADC$ половина једнакостраничног троугла, па је $\alpha = 60^{0}$.

**16** Збир квадрата косинуса (синуса) оштрих углова у правоуглом троуглу је:

(A) мањи од 1 (B) 1 (C) већи од 1 (D) већи од 2 (E) 2

*Решење*: (B) 1

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \cos^2\alpha + \cos^2(90^{o} - \alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

**17.** Разломак $\dfrac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}}$ једнак је:

(A) $a^{-6} - b^{-6}$ (B) $a^{-2} - b^{-2}$ (C) $a^{-2} + b^{-2}$ (D) $a^2 + b^2$ (E) $a^2 - b^2$

*Решење:* (C) $a^{-2} + b^{-2}$

$$\frac{a^{-4} - b^{-4}}{a^{-2} - b^{-2}} = \frac{\dfrac{1}{a^4} - \dfrac{1}{b^4}}{\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}} = \frac{\dfrac{b^4 - a^4}{a^4 b^4}}{\dfrac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}} = \frac{a^2 b^2 (b^2 - a^2)(b^2 + a^2)}{a^4 b^4 (b^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = a^{-2} + b^{-2}.$$

Постоје и други начини (на пример, да се бројилац растави као разлика квадрата и онда разломак скрати).

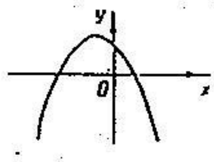
## Задаци који се оцењују са 5 бодова

**18.** Који знак имају бројеви $a$, $b$, $c$, ако је на слици приказан график функције $y = ax^2 + bx + c$?

(A) $a<0,\ b>0,\ c>0$ (B) $a<0,\ b>0,\ c<0$

(C) $a>0,\ b>0,\ c<0$ (D) $a<0,\ b<0,\ c>0$

(E) $a<0,\ b<0,\ c<0$




*Решење*: (D) $a<0,\ b<0,\ c>0$

За график на слици важи: $a<0$ (окренут је на доле); $-\dfrac{b}{a}<0$ (збир нула функције) и због $a<0$ мора бити $b<0$; $\dfrac{c}{a}<0$ (производ нула функције) и због $a<0$ мора бити $c>0$; значи, следи закључак (D).

**19.** Ако је $3^x = 12$ и $12^y = 81$, онда је производ $xy$ једнак:

(A) $-5$ (B) 3,5 (C) 1 (D) 4 (E) 27

*Решење* : (D) 4

Заменимо ли 12 са $3^x$ у другу једначину, имаћемо $\left(3^x\right)^y = 81$, тј. $3^{xy} = 3^4$, одакле је $xy=4$.

**20.** Производ свих решења једначине $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ је:

(A) –9, (B) –3n (C) –1 (D) 3 (E) 9

*Решење*: (A) $-9$. Ако је $x>0$, једначина се своди на $x^2-2x-3=0$ и њено једино решење је $x=3$, јер $x=-1$ отпада због услова $x>0$. Ако је $x<0$, онда имамо једначину $x^2+2x-3=0$ и њено решење је $x=-3$, јер њено друго решење $x=1$ одбацујемо због услова $x<0$. Дакле, производ решења је $-9$.

**21.** Број решења једначине $\log^2 x^2 = \log 10000$ (основа лог. је 10) је:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

*Решење*: (E) 4

$$(\log x^2)^2 = \log 10^4 \Rightarrow (\log x^2)^2 = 4 \Rightarrow \log x^2 = 2 \vee \log x^2 = -2$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 \vee x^2 = 0{,}01 \Rightarrow (x=10 \vee x=-10) \vee (x=0{,}1 \vee x=-0{,}1)$$

$$\Rightarrow x=10 \vee x=-10 \vee x=0{,}1 \vee x=-0{,}1.$$

**22.** Ако је $a = 9992008^2$ и $b = 9992007 \cdot 9992009$, онда је тачна само релација (формула):

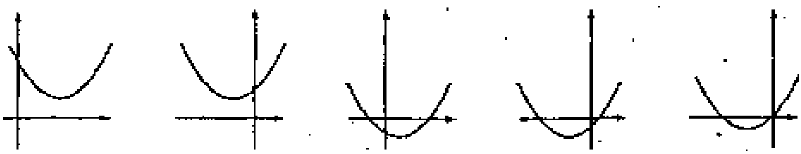
(A) $b = a - 1$ (B) $a = b - 1$ (C) $a=2b$ (D) $a^2 = b^2 + 1$ (E) $b^2 = a^2 + 1$.

*Решење*: (A) $b = a - 1$

$a - 1 = 9992008^2 - 1 = (9992008 - 1)(9992008 + 1) = 9992007 \cdot 999009 = b$.

Дакле, $a - 1 = b$, односно $b = a - 1$.

**23.** Који од ових графика представља функцију $y = x^2 + 2bx + c$, где је $b < 0$ и $c > b^2$ ?

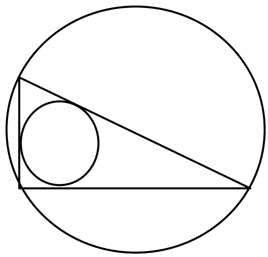


(A) (B) (C) (D) (E)

*Решење*: График (A).

*Образложење*: Дискриминанта $4b^2 - 4c = 4(b^2 - c)$; координате темена параболе: $\alpha = -b$, $\beta = c - b^2$. Због датих услова овде је $D < 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Значи, у питању је график (A).

**24.** Пречници описане и уписане кружнице правоуглог троугла су редом $2R = 13$ и $2r = 4$. Колики је обим тог троугла?

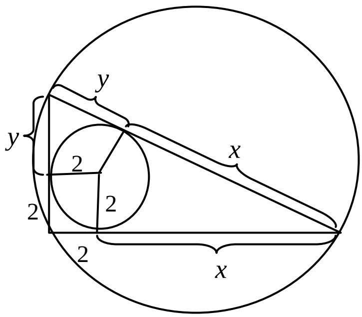


(A) 30 (B) 36 (C) 28 (D) 31 (E) 29

*Решење* : (A) 30

Према условима задатка је $R$=6,5 и $r$=2.

Према ознакама са слике је и $c=x+y=2R=13$, па је тражени обим очигледно $O=2+2+2x+2y=4+2(x+y)=4+26=30$. Међутим, може и овако (ако треба одредити и старнице троугла).




Како је троугао правоугли, важи Питагорина теорема: $(2 + x)^2 + (2 + y)^2 = (x + y)^2$,

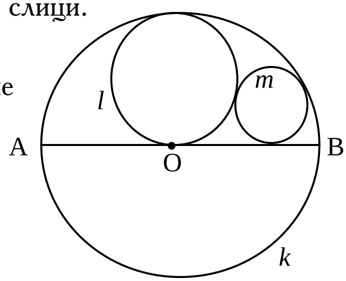
где су $x$ и $y$ тангентне дужи. Даље је:

$x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow$

$2x+2y+4=xy \Rightarrow xy-2(x+y)=4 \Rightarrow xy-26=4 \Rightarrow xy=30.$

Тако смо дошли до следећих веза: $x+y=13$ и $xy=30$, одакле следи: $x=13,\ y=3$. Странице правоуглог троугла су тада $a=12,\ b=5$ и $c=13$. Обим је 30. Површина (мада се у задатку не тражи) је 30. (Веза $xy=30$ се може добити и из $P=rs$, где је s полуобим троугла).

**25.** Три кружнице $k$, $l$, $m$ се додирују као на слици. Тачка $O$ је центар, а $AB=2R$ пречник велике кружнице. Утврдити како се односе површине кругова $l$ и $m$, тј. колико пута је површина средњег круга већа од површине најмањег круга?




(A) 2 (B) 12 (C) 16 (D) 5 (E) 4

*Решење:* (E) 4. Према ознакама на слици:

$OD=OB=OC=R=2r_1$.

$(2r_1-r_2)^2=d^2+r_2^2$ и $(r_1+r_2)^2=d^2+(r_1-r_2)^2$

Сређивањем добијамо:

$4r_1^2-4r_1r_2=d^2$ и $4r_1r_2=d^2$.

Одавде, елиминацијом $d$, имамо $r_1=2r_2$,

па је тражени однос $\dfrac{P_l}{P_m}=\dfrac{r_1^2\pi}{r_2^2\pi}=\dfrac{4r_2^2\pi}{r_2^2\pi}=4.$